Rivista del
Dipartimento del Territorio
N. 3 (1997) – pp. 107-136

Sulla trasformazione delle coordinate plano-cartografiche dalla rappresentazione di Sanson-Flamsteed alla rappresentazione di Gauss-Boaga e viceversa nell'ambito dei sistemi di assi catastali

SABATINO DI FILIPPO (*)

PREMESSA

La rappresentazione equivalente di Sanson-Flamsteed fu utilizzata per la formazione delle mappe catastali prescritta dalla Legge 4/1/1880 n. 5222, concernente «l'imposta fondiaria nel compartimento modenese», e dal relativo regolamento, emanato con R.D. 8/6/1882 n. 839.

In attuazione della citata normativa, la Direzione Generale delle imposte dirette e del catasto, all'epoca competente in materia, dispose, con le modalità indicate, la formazione delle mappe delle province di Modena, Reggio Emilia e Massa Carrara.

In seguito alle variazioni intervenute successivamente nei confini provinciali, una parte di tali mappe ricade ora anche nelle province di Lucca, La Spezia e Pistoia.

Al momento dell'emanazione della Legge 1/3/1886 istitutiva del Catasto Italiano, che riprende tutti i principi di base della precedente legge, nel mentre vennero recepite ed utilizzate le mappe così formate, il sistema di rappresentazione di Sanson-Flamsteed, a causa soprattutto degli inconvenienti derivanti all'elevato numero di piccole origini cui diede luogo (come sarà chiarito più avanti con maggior dettaglio), fu abbandonato a favore di quello di Cassini-Soldner in cui fu realizzata successivamente la stragrande maggioranza della cartografia catastale.

Per la conduzione delle operazioni trigonometriche fu adottato come riferimento geodetico l'ellissoide di Bessel.

Per il Catasto, il problema della trasformazione delle coordinate plano-cartografiche tra le rappresentazioni di Sanson-Flamsteed e Gauss-Boaga riveste notevole importanza, non solo per naturali esigenze di carattere scientifico, ma anche per esigenze di carattere prettamente operativo, tra cui in particolare:

– la determinazione delle coordinate nel sistema geodetico nazionale dei vertici della triangolazione catastale, che, come ben noto, sono distribuiti con elevata densità sul territorio e sono pertanto suscettibili di utilizzazione in lavori cartografici e topografici anche di piccola estensione;

– il raccordo della cartografia catastale, caratterizzata da una grande scala di rappresentazione, con quella prodotta da altri Enti territoriali (Regioni, Province, Comuni, ecc.).

Questi obiettivi di carattere generale si sono ulteriormente ampliati in questi ultimi anni in conseguenza soprattutto dei seguenti motivi:

1) l'acquisizione della cartografia catastale in forma numerica;

2) l'istituzione, in corso, di una maglia di Punti Fiduciali a cui dovranno essere collegati i nuovi rilievi di aggiornamento catastale.

(*) Dipartimento del Territorio - Direzione Centrale del Catasto, dei Servizi Geotopocartografici e della Conservazione dei RR.II. - Divisione XII.

Per quanto si riferisce al primo aspetto va tenuto presente che attualmente l'Amministrazione ha già provveduto alla formazione degli archivi magnetici di cartografia numerica per le mappe di 27 province. Tale intervento, nel mentre ha consentito di rimuovere immediatamente i problemi connessi al cattivo stato di conservazione dei supporti cartografici e di avviare pienamente le procedure di gestione automatizzata delle mappe catastali, ha altresì ulteriormente evidenziato i limiti di utilizzabilità delle mappe, derivanti dalla molteplicità dei sistemi di assi catastali di riferimento.

Per quanto si riferisce invece al secondo aspetto, occorre tener presente che i Punti Fiduciali definiti analiticamente devono essere considerati a tutti gli effetti un raffittimento della rete geodetica nazionale. Pertanto la loro utilizzazione per l'appoggio dei rilievi di aggiornamento catastale, nelle zone dotate di mappe nella proiezione Sanson-Flamsteed, richiede, almeno fino all'acquisizione numerica delle mappe stesse, la definizione delle coordinate di tali vertici nel suddetto sistema di rappresentazione, svolgendo essi una funzione del tutto simile a quella tipica dei vertici di triangolazione.

Infine, come apparirà meglio in seguito, l'esecuzione della trasformazione delle coordinate dal sistema Sanson-Flamsteed al sistema geodetico nazionale permette di eliminare le disomogeneità esistenti tra reti trigonometriche catastali tra loro e tra queste e quella dell'I.G.M.

Al riguardo conviene precisare che la determinazione della rete geodetica fondamentale italiana è stata eseguita dall'I.G.M. ed ha richiesto un lungo periodo di tempo, protrattosi dagli ultimi decenni del secolo scorso ai primi due decenni di quello attuale.

Allo scopo di snellire, per quanto possibile le procedure del calcolo di compensazione, la rete fu suddivisa in due blocchi.

Il primo blocco, che interessa ai fini del presente lavoro, risultò costituito da reti parziali, ubicate a Nord del parallelo di Roma, appoggiate rispettivamente alle basi di Udine, Somma Lombardo, Piombino, che furono dapprima compensate singolarmente, con riferimento all'ellissoide di Bessel orientato a Genova (Istituto Idrografico della Marina) e quindi riunificate con un calcolo di compensazione supplementare.

All'epoca dell'adozione della rappresentazione di Sanson-Flamsteed in ambito catastale, le operazioni per la determinazione della rete geodetica fondamentale, da parte dell'I.G.M., erano quindi in pieno svolgimento ma ancora ben lontane dal loro compimento.

Peraltro, con riferimento all'urgenza di avviare il rilevamento della mappa particellare, documento basilare per l'espletamento dei compiti dell'Amministrazione del Catasto, vennero utilizzati gli elementi delle compensazioni provvisorie delle reti trigonometriche parziali via via rilevate dall'I.G.M..

Allo scopo di aderire alle deliberazioni dell'Associazione Internazionale di Geodesia e su analogo indirizzo assunto dalla Commissione Geodetica Italiana, a decorrere dall'anno 1941, l'I.G.M. ha provveduto infine alla determinazione delle coordinate geografiche di tutti i vertici delle proprie reti trigonometriche sull'ellissoide internazionale (Hayford) orientato a Roma M. Mario, nonché, a seguito della contestuale adozione della proiezione conforme di Gauss-Boaga, alla determinazione delle coordinate plano-cartografiche degli stessi vertici nel suddetto sistema di rappresentazione.

Il metodo che si espone, per il passaggio delle coordinate plano-cartografiche dei vertici dal sistema di rappresentazione Sanson-Flamsteed al sistema Gauss-Boaga e viceversa, si basa su procedure che evitano il passaggio attraverso le coordinate geografiche, rese possibili nel caso specifico dall'estensione molto limitata dei sistemi di assi catastali, e che, tenendo conto del quadro sommariamente descritto, si fondano sulla ricerca dei parametri di trasformazione con metodi probabilistici, utilizzabili quando si dispone delle coordinate di alcuni vertici nei due sistemi di rappresentazione.

Poiché peraltro risulta necessario a tal fine operare opportuni passaggi, sia delle coordinate Sanson-Flamsteed che delle coordinate Gauss-Boaga, a riferimenti gaussiani e viceversa ciascuno rispettivamente dedotto dai suddetti sistemi di assi, si è ritenuto opportuno inserire altresì alcuni richiami sulle relazioni che rendono possibili tali passaggi.

Per una maggiore chiarezza espositiva degli sviluppi della trattazione, verranno anche premessi alcuni brevi richiami sulle principali proprietà della proiezione di Sanson-Flamsteed e sulle sue modalità di impiego per la realizzazione delle mappe catastali.

1. – IMPIEGO DELLA RAPPRESENTAZIONE DI SANSON-FLAMSTEED NELLA FORMAZIONE DELLE MAPPE CATASTALI

Con riferimento alla *Fig. 1*, per costruire la mappa di un determinato territorio in proiezione di Sanson-Flamsteed, fu considerato un sistema di assi cartesiani x, y con origine O (φ_o, λ_o) nel punto centrale del territorio stesso ed asse y costituito dallo sviluppo rettilineo del meridiano passante per tale origine (meridiano principale).

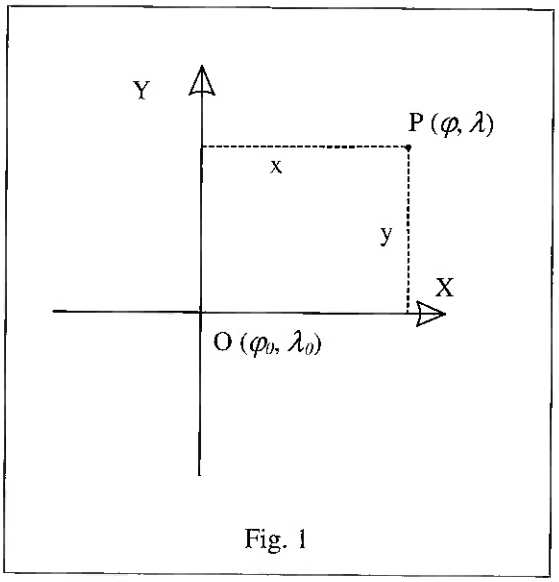

Fig. 1

Tanto premesso, il valore della coordinata x di un punto generico $P(\varphi, \lambda)$ risulta definito dalla lunghezza dell'arco di parallelo di latitudine φ, intercettato fra i meridiani di longitudine λ e λ_o, mentre la coordinata y è data dalla lunghezza dell'arco di meridiano compreso tra le latitudini φ e φ_o.

Pertanto se consideriamo sul meridiano principale (*Fig. 2a*) i punti $O, q_1, q_2, ...,$ $q'_1, q'_2, ...,$ a questi corrispondono sul piano della rappresentazione (*Fig. 2b*) i punti $O, Q_1, Q_2, ...,$ $Q'_1, Q'_2, ...,$ ad uguale intervallo dei primi e disposti sull'asse y, mentre gli archi di parallelo Op_o, q_1p_1, q_2p_2, ..., $q'_1p'_1$, $q'_2p'_2$, ..., danno luogo ai segmenti di lunghezza corrispondente, OP_o, Q_1P_1, Q_2P_2, ..., $Q'_1P'_1$, $Q'_2P'_2$, ... disposti ortogonalmente all'asse y.

Ricordiamo ora che il raggio del parallelo di latitudine φ si ottiene facilmente con la relazione:

$$r = N_\varphi \cos \varphi$$

dove N_φ rappresenta il raggio di curvatura massimo, o gran normale, dell'ellissoide di riferimento nel punto di latitudine φ.

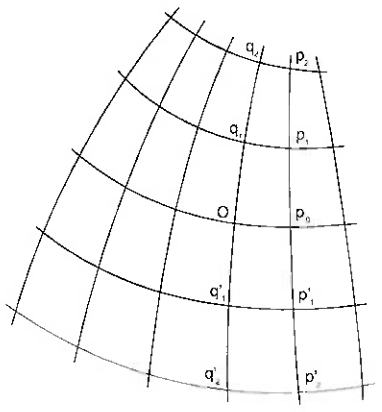

Fig. 2a

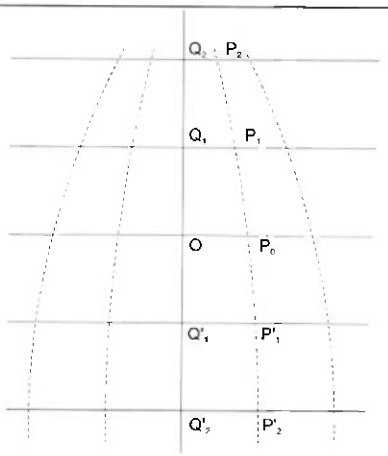

Fig. 2b

La lunghezza x dell'arco di parallelo di latitudine φ, compreso tra i meridiani di longitudine λ e λ_o, si ottiene poi dalla relazione:

$$x = r\,(\lambda - \lambda_o) = r\,\omega$$

con $\omega = \lambda - \lambda_o$, espresso in radianti.

In relazione alla limitata estensione dei sistemi di assi catastali utilizzati nel caso in esame, si ha che il valore di N_φ subisce variazioni senz'altro trascurabili ai nostri fini.

Risulta così che il raggio del parallelo r si può ritenere proporzionale al valore del coseno della latitudine φ.

Si ha allora che il luogo dei punti che sul piano della rappresentazione di Sanson-Flamsteed corrisponde ad un meridiano di longitudine ω è costituito da una sinusoide, cosicché tale rappresentazione dicesi anche «proiezione sinusoidale».

Peraltro, ai fini applicativi, nell'ambito di zone di limitata ampiezza i meridiani vengono rappresentati con segmenti di retta.

I moduli principali di deformazione lineare m_1 ed m_2 (valori massimo e minimo del rapporto fra un elemento lineare della rappresentazione ed il corrispondente elemento sull'ellissoide di riferimento), in funzione della latitudine φ e della differenza di longitudine ω di un punto rispetto al meridiano principale, sono dati dalle relazioni:

$$m_1 = 1 + \gamma / 2; \qquad m_2 = 1 - \gamma / 2; \qquad \text{con } \gamma = \omega \operatorname{sen} \varphi$$

Osserviamo che alla latitudine media dell'Italia, ai quattro vertici di un foglio I.G.M. alla scala 1:100.000, delle dimensioni di 30′ nel senso del parallelo e di 20′ nel senso del meridiano, i moduli principali evidenziano deformazioni lineari di segno opposto e di entità prossima al valore di 1.5 per mille.

A causa delle non lievi deformazioni prodotte dal sistema di rappresentazione e per ridurre al minimo le correzioni sferoidiche nei calcoli trigonometrici, per le applicazioni catastali vennero istituiti, per ciascun foglio della carta d'Italia, piú sistemi di assi coordinati.

Precisamente ciascun foglio alla scala 1:100.000 venne ripartito, in base alla rete dei meridiani e dei paralleli, in 24 zone trapezoidali aventi ampiezza di 5′ in latitudine e di 5′ in longitudine.

Ciascuna zona fu denominata «*foglio catastale*» e riferita ad un proprio sistema di assi avente origine nel punto centrale (cfr. *Fig. 3*) ed orientato secondo le direzioni del meridiano e del parallelo passanti per il suddetto punto.

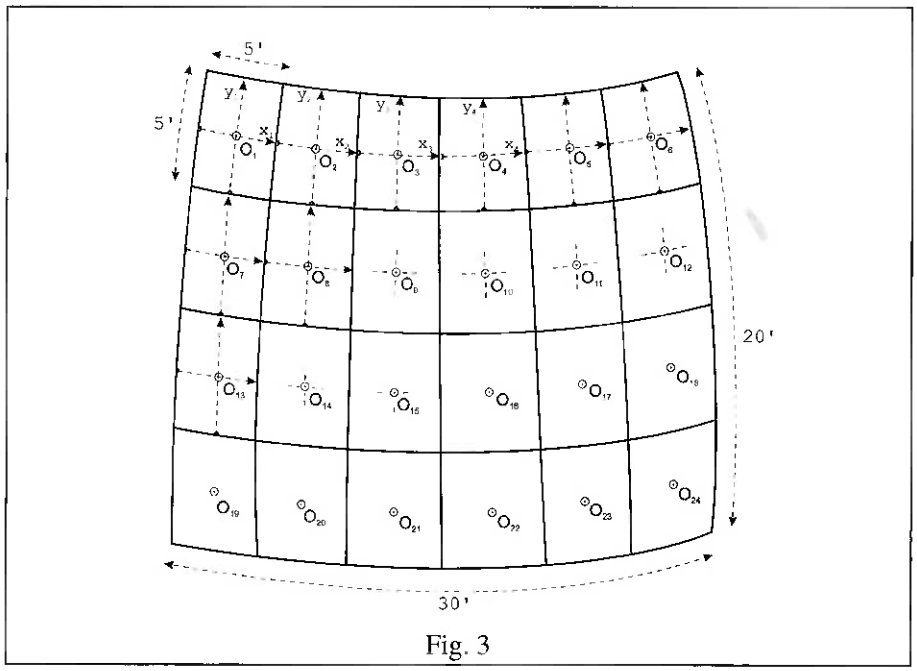

Fig. 3

La rappresentazione di Sanson-Flamsteed applicata alla costruzione di un «*foglio catastale*» è caratterizzata, ai quattro vertici del foglio stesso, da moduli principali che evidenziano deformazioni lineari di segno opposto e di entità prossima al valore di 0.25 per mille, che può ritenersi accettabile.

I sistemi di assi catastali così ottenuti, nel territorio delle province richiamate in premessa, risultarono ben 146.

Senza indugiare in ulteriori considerazioni di carattere teorico, per le quali si rimanda a trattati specializzati, si ha che limitando lo sviluppo della rappresentazione di Sanson-Flamsteed al campo topografico, in cui rientrano sia un foglio della carta d'Italia che, a maggior ragione, un «*foglio catastale*», le equazioni della carta risultano:

$$[1] \qquad \begin{aligned} x &= (\lambda - \lambda_o)\, N_o \cos\varphi \;=\; \omega\; N_o \cos\varphi \\ y &= \rho_o\,(\varphi - \varphi_o) = \rho_o\,\delta\varphi \end{aligned}$$

dove N_o e ρ_o sono i raggi di curvatura principali dell'ellissoide di riferimento in corrispondenza del punto centrale O di coordinate geografiche φ_o, λ_o, mentre (φ, λ) sono le coordinate geografiche del generico punto P di cui si vogliono calcolare le coordinate plano-cartografiche rispetto ad O.

2. – LA RAPPRESENTAZIONE DI GAUSS NEL CASO DI SISTEMI DI ASSI LIMITATI ALL'ESTENSIONE DI UN «FOGLIO CATASTALE».

Con riferimento alla *Fig. 4a*, consideriamo il meridiano per il punto centrale O, assunto come origine delle longitudini ω, e p un punto generico di coordinate geografiche (φ, ω).

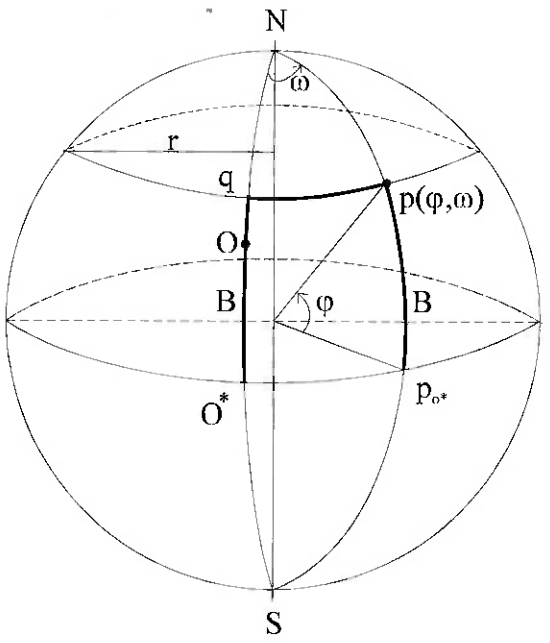

Fig 4a

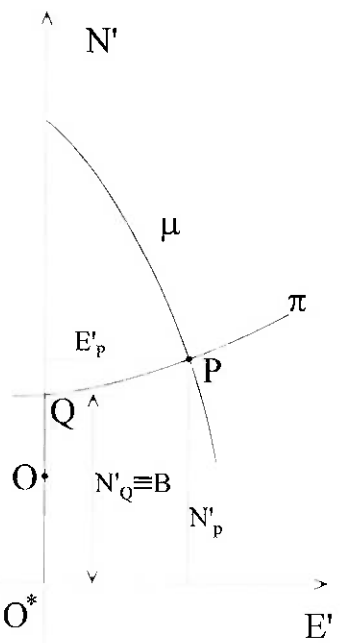

Fig. 4b

La posizione di p sull'ellissoide di riferimento può essere altresì definita mediante l'arco di parallelo

$$pq = r\;\omega = \omega\, N\cos\varphi$$

compreso fra i meridiani per l'origine O e per il punto P, alla latitudine φ, e l'arco di meridiano

$$O^*q = p_o^*p = B = \int_o^{\varphi} \rho \, d\varphi$$

intercettato fra l'equatore ed il parallelo di latitudine φ.

Sul piano di Gauss (cfr. *Fig.* 4b), il punto P è individuato dalla intersezione delle linee μ e π che rappresentano le trasformate rispettivamente del meridiano e del parallelo per p.

Con valori di $|\omega| \leq 2'30$ (intervallo nel quale può oscillare la longitudine nell'ambito di un «*foglio catastale*» nel senso precedentemente precisato), le equazioni della carta di Gauss per definire le coordinate plano-cartografiche di P assumono la forma, molto semplice:

$$[2] \qquad \begin{aligned} N'_P &= B + \frac{1}{2} \omega^2 N_o \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \\ E'_p &= \omega N_o \cos \varphi \end{aligned}$$

che peraltro, come ben noto, hanno una validità più ampia ovvero per valori di $|\omega| \leq 5'$ intervallo dove può senz'altro essere trascurata la variazione del valore della gran normale rispetto a quella per l'origine N_o.

Nelle precedenti B rappresenta la lunghezza dell'arco di meridiano compreso fra l'equatore ed il parallelo avente latitudine φ del punto P di cui si vogliono determinare le coordinate plano-cartografiche ed N_o la gran normale in corrispondenza del punto O.

Se ora facciamo l'ipotesi di conoscere le coordinate plano-cartografiche gaussiane del punto O dell'ellissoide di riferimento, punto centrale del «*foglio catastale*», e siano $(N'_o, 0)$ – l'ipotesi è una semplice posizione di comodo poiché come si vedrà ai punti 5. e 7. la soluzione del problema non richiede affatto la conoscenza delle coordinate plano-cartografiche gaussiane di tale punto – potremo scrivere la seguente relazione:

$$[3] \qquad B = N'_o + \rho_o \delta\varphi$$

valida senz'altro nell'ambito di un «*foglio catastale*».

Con tale posizione, le equazioni della rappresentazione gaussiana per la definizione delle coordinate plano-cartografiche del generico punto P diventano:

$$[4] \qquad \begin{aligned} N'_p &= N'_o + \rho_o \delta\varphi + \frac{1}{2} \omega^2 N_o \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \\ E'_p &= \omega N_o \cos \varphi \end{aligned}$$

3. – LE RELAZIONI INTERCORRENTI TRA COORDINATE DI SANSON–FLAMSTEED E COORDINATE DI GAUSS NELL'AMBITO DI UN «FOGLIO CATASTALE»

Il confronto tra le [1] e le [4] permette ora di scrivere le seguenti relazioni:

$$[5] \qquad \begin{aligned} N'_p &= N'_o + y + \frac{1}{2} (x^2 N_o / (N_o^2 \cos^2 \varphi)) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = N'_o + y + \frac{1}{2} x^2 \operatorname{tg} \varphi / N_o \\ E'_p &= x \end{aligned}$$

che costituiscono una prima espressione delle cercate relazioni tra coordinate plano-cartografiche di Gauss e quelle di Sanson-Flamsteed nel caso di un «*foglio catastale*».

Osserviamo a questo punto che la prima delle suddette relazioni richiede la conoscenza della latitudine del punto p e quindi risulta di applicazione non immediata.

Ci proponiamo pertanto di ricercare delle espressioni di più semplice applicazione.

A tal fine poniamo intanto in evidenza che, ricordando le province in cui è stato utilizzato il sistema di rappresentazione Sanson-Flamsteed per la formazione delle mappe catastali, il territorio interessato è compreso tra i seguenti valori della latitudine:

$$43°50' \leq \varphi \leq 44°50'$$

Tanto premesso determiniamo, con riferimento all'ellissoide di Bessel, i valori dell'espressione $\text{tg}\,\varphi\,/2N_o$ nonché il valore massimo che può raggiungere la x con ω = 2'30", in corrispondenza delle sottoindicate latitudini:

$\varphi = 43°50'$: $N_o = 6.387.629{,}772$; $c_1 = \text{tg}\,\varphi\,/2N_o = 7{,}5151736 \times 10^{-8}$; $x_{max} = \omega\, N_o \cos\varphi = 3351\text{m}$

$\varphi = 44°20'$: $N_o = 6.387.816{,}304$; $c_2 = \text{tg}\,\varphi\,/2N_o = 7{,}6473361 \times 10^{-8}$; $x_{max} = \omega\, N_o \cos\varphi = 3323\text{m}$

$\varphi = 44°50'$: $N_o = 6.388.002{,}926$; $c_3 = \text{tg}\,\varphi\,/2N_o = 7{,}7817676 \times 10^{-8}$; $x_{max} = \omega\, N_o \cos\varphi = 3294\text{m}$

Risulta pertanto che:

per $\varphi = 43°50'$: $\quad x_{max}^2 \text{tg}\,\varphi\,/2N_o = c_1 x_{max}^2 = 0{,}844\text{m}$

per $\varphi = 44°20'$: $\quad x_{max}^2 \text{tg}\,\varphi\,/2N_o = c_2 x_{max}^2 = 0{,}844\text{m}$

per $\varphi = 44°50'$: $\quad x_{max}^2 \text{tg}\,\varphi\,/2N_o = c_3 x_{max}^2 = 0{,}844\text{m}$

Utilizzando invece sempre il valore di c_2 risulta che:

per $\varphi = 43°50'$: $\quad c_2 x_{max}^2 = 0{,}859\text{m}$

per $\varphi = 44°50'$: $\quad c_2 x_{max}^2 = 0{,}830\text{m}$

Si vede pertanto che adottando in ogni caso il valore di $K_1 = c_2$, nella determinazione delle coordinate gaussiane, si commette un errore non superiore a 1,5 cm, del tutto accettabile ai nostri fini.

Le relazioni [5] possono perciò essere poste nella forma:

$$[6] \qquad \begin{aligned} N'_p &= N'_o + y + K_1 x^2 \\ E'_p &= x \end{aligned}$$

con $K_1 = 7{,}6473361 \times 10^{-8}$, valido per coordinate espresse in metri.

Le [6] permettono l'immediato passaggio diretto tra coordinate plano-cartografiche di Sanson-Flamsteed e di Gauss.

Le precedenti possono essere facilmente invertite. Si ha:

$$[7] \qquad \begin{aligned} y &= N'_p - N'_o - K_1 E'^2_p \\ x &= E'_p \end{aligned}$$

Se consideriamo infine un sistema di assi gaussiano con origine O coincidente con quella catastale, le precedenti forniscono rispettivamente ($N'_o = 0$):

$$[8] \qquad \begin{aligned} N'_p &= y + K_1 x^2 \\ E'_p &= x \end{aligned}$$

$$[9] \qquad \begin{aligned} y &= N'_p - K_1 E'^2_p \\ x &= E'_p \end{aligned}$$

4. – LE RELAZIONI INTERCORRENTI TRA COORDINATE DI GAUSS NELL'AMBITO DI UN «FOGLIO CATASTALE»

Consideriamo due punti O' e P appartenenti allo stesso «*foglio catastale*».

Siano note la lunghezza s dell'arco di geodetica $O'P$ ed il suo azimut piano $\bar{\alpha}$ in O'[1].

Siano date inoltre le coordinate gaussiane di un punto $O' \equiv (N'_{O'}, E'_{O'})$.

Tanto premesso, indicando con s' e α' i valori corrispondenti ad s ed $\bar{\alpha}$ nel sistema di rappresentazione gaussiano, le coordinate gaussiane del punto $P \equiv (N'_P, E'_P)$ sono date dalle relazioni:

$$[10] \qquad N'_P = N'_{O'} + s' \cos \alpha'; \qquad E'_P = E'_{O'} + s' \operatorname{sen} \alpha'$$

dove, ricordando le espressioni del modulo di deformazione lineare e della riduzione angolare,

---

[1] Con riferimento alla *Fig. 5*, ricordiamo che si definisce azimut piano dell'arco di geodetica $O'P$ nel punto O', l'angolo che essa forma in O' con la direzione $\mu' \mu'$ geodeticamente parallela al meridiano principale $\mu_o \mu_o$ del sistema di riferimento. Due archi ellissoidici si dicono geodeticamente paralleli quando si mantiene inalterata la loro distanza geodetica.

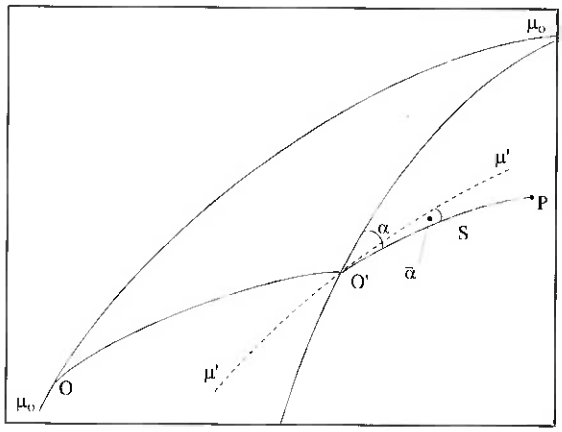

Fig. 5

si ha:

$$s' = s\,(1 + (E'^2_{O'} + E'_{O'}E'_P + E'^2_P)/6R^2_{O'})$$

[11]

$$\alpha' = \alpha - (N'_P - N'_{O'})(2\,E'_{O'} + E'_{O'})/\,6R^2_{O'}$$

con $R_{O'}$ raggio della sfera locale per il punto O'.

Introduciamo ora le precedenti espressioni [11] nelle relazioni [10] e consideriamo lo sviluppo in serie rispettivamente del coseno e del seno fino ai termini del primo ordine.

Si ottiene così:

$$N'_P = N'_{O'} + (1+ (E'^2_{O'} + E'_{O'}E'_P+E'^2_P)/6R^2_{O'})(s\,\cos\bar{\alpha} + (N'_P - N'_{O'})(2\,E'_{O'} + E'_P)\,s\,\mathrm{sen}\bar{\alpha}\,/\,6R^2_{O'}))$$

$$E'_P = E'_{O'} + (1+ (E'^2_{O'} + E'_{O'}E'_P+E'^2_P)/6R^2_{O'})(s\,\mathrm{sen}\bar{\alpha} - (N'_P - N'_{O'})(2\,E'_{O'} + E'_P)\,s\,\cos\bar{\alpha}\,/\,6R^2_{O'}))$$

in cui, al secondo membro, sono peraltro incogniti i valori di N'_P, E'_P.

Poiché però conosciamo per ipotesi i valori di s ed α, in prima approssimazione, tuttavia sufficiente per i nostri scopi, poniamo al secondo membro:

$$N'_P \cong N'_{O'} + s\,\cos\bar{\alpha}; \qquad E'_P \cong E'_{O'} + s\,\mathrm{sen}\bar{\alpha}$$

ed altresì:

[12] $$N'_P - N'_{O'} \cong s\,\cos\bar{\alpha} = u; \qquad E'_P - E'_{O'} \cong s\,\mathrm{sen}\bar{\alpha} = \mathrm{v}$$

Con le posizioni fatte, svolgendo le parentesi si ottengono facilmente, a meno dei termini di 4° ordine, le seguenti relazioni:

$$N'_P = N'_{O'} + u + u\,E'^2_P/2R^2_{O'} - uv^2/6R^2_{O'}$$

[13]

$$E'_P = E'_{O'} + v - u^2\,E'_{O'}/2R^2_{O'} - u^2v/6R^2_{O'} + v\,E'^2_M/2R^2_{O'}$$

dove si è posto:

$$(E'^2_{O'} + E'_{O'}E'_P + E'^2_P)/3 = E'^2_M \qquad \text{con} \qquad E'_P = E'_{O'} + v$$

Osserviamo ancora che per $\varphi = 44°20'$ risulta $\rho_o = \mathrm{a}(1 - \mathrm{e}^2)(1 - \mathrm{e}^2\mathrm{sen}^2\varphi)^{-3/2} = 6365931{,}604\mathrm{m}$ e quindi ricordando le [1] $y = \rho_o\delta\varphi = 9258{,}9\mathrm{m}$.

Tenendo conto della dislocazione delle province interessate alla trasformazione di cui stiamo trattando si ha allora che $u < 7$ km, $v < 10$km, $E'_{O'} < 200$ km, cosicché assunto, in prima approssimazione, $R_{O'} = 6.000$ km, risulta:

$$uv^2/6R^2_{O'} \leq 3\mathrm{mm}; \qquad u^2v/6R^2_{O'} \leq 2\mathrm{mm}.$$

E quindi tali termini sono del tutto trascurabili.

Si ha altresì che:

$$v\,E'^2_M/2R^2_{O'} = v\,(E'^2_{O'} + E'_{O'}E'_P + E'^2_P)/6R^2_{O'} = v\,(E'^2_{O'} + E'_{O'}(E'_{O'}+v)+(E'_{O'}+v)^2)/6R^2_{O'} =$$
$$= (3v\,E'^2_{O'} + 3\,v^2\,E'_{O'} + v^3)/6R^2_{O'}$$

cosicché, per quanto appena evidenziato, assumendo:

$$v\,E'^2_M/2R^2_{O'} = v\,E'^2_{O'}\,(E'_{O'} + v)/2R^2_{O'}$$

si commette un errore inferiore a 2mm, del tutto trascurabile.

Pertanto, in luogo delle [13] è lecito intanto considerare le più semplici relazioni seguenti:

$$E'_P = E'_{O'} + v + (vE'_{O'} + v^2 - u^2)\,E'_{O'}/2R^2_{O'}$$

[14]

$$N'_P = N'_{O'} + u\,(1 + E'^2_P/2R^2_{O'})$$

Peraltro riprendendo in esame la seconda delle precedenti, si ha, svolgendo la parentesi:

$$N'_P = N'_{O'} + u\,(1 + E'^2_P/2R^2_{O'}) = N'_{O'} + u + u\,E'^2_P/2R^2_{O'}$$

Sviluppando in serie l'ultimo termine nella variabile $R_{O'}$ si ha, arrestando lo sviluppo ai termini del primo ordine:

$$u\,E'^2_P/2(R_{O'} + \delta\,R_{O'})^2 = u\,E'^2_P/2R^2_{O'} - u\,E'^2_P\,\delta\,R_{O'}\,/R^3_{O'}$$

Posto, al solito, $u = 7$ km, $E'_P = 200$ km, $R_{O'} = 6.000$ km, si vede che risulta:

$$u\,E'^2_P\,\delta\,R_{O'}\,/R^3_{O'} < 2 \text{ mm}$$

se:

$$\delta\,R_{O'} < 2 \text{ x } R^3_{O'} \text{ x } 10^{-6}\,/(200^2 \text{ x } 7) = 1{,}5 \text{ km}$$

Considerazioni analoghe valgono per la prima delle [14].

Considerando allora i seguenti valori di $R_{O'} = a(1 - e^2)^{1/2}(1 - e^2\text{sen}^2\varphi)^{-1}$, relativi sia alla ellissoide di Hayford, sia all'ellissoide di Bessel:

	Hayford	Bessel
per $\varphi = 43°50'$:	$R_{O'} = 6.377.476{,}022$ m;	$R_{O'} = 6.376.492{,}146$ m
per $\varphi = 44°20'$:	$R_{O'} = 6.377.851{,}201$ m;	$R_{O'} = 6.376.846{,}568$ m
per $\varphi = 44°50'$:	$R_{O'} = 6.378.226{,}576$ m;	$R_{O'} = 6.377.237{,}180$ m

si vede che è senz'altro lecito ai nostri fini assumere $R_{O'} = 6.377.851{,}201$ in tutti i casi.

Possiamo porre ancora:

$$1/2R^2_{O'} = K_2 = 1/2\text{x}6.377.851{,}201^2 = 1{,}2291962\text{x}10^{-14}$$

Con le posizioni fatte, le relazioni [14] assumono la forma:

$$\begin{aligned} E'_P &= E'_{O'} + v + K_2\, E'_{O'}\,(vE'_{O'} + v^2 - u^2) \\ N'_P &= N'_{O'} + u\,(1 + K_2\, E'^2_P) \end{aligned} \qquad [15]$$

di facilissima ed immediata applicazione.

Osserviamo infine che se il vertice O' coincide con l'origine del sistema di assi di riferimento e quindi $N'_{O'} = E'_{O'} = 0$, le precedenti forniscono:

$$\begin{aligned} N'_P &= u\,(1 + K_2\, E'^2_P) \cong u\,(1 + K_2\, v^2) \cong u \\ E'_P &= v \end{aligned} \qquad [16]$$

5. – PASSAGGIO DI COORDINATE TRA SISTEMI DI ASSI

Ai fini delle applicazioni esaminiamo ora le modalità di passaggio delle coordinate tra i diversi sistemi di assi che, secondo i casi, occorre considerare per la risoluzione del problema in esame.

5.1. – Passaggio da coordinate di Sanson-Flamsteed a coordinate di Gauss

Siano date le coordinate Sanson-Flamsteed dei vertici $\mathrm{P} \equiv (x_P, y_P)$ e $O' \equiv (x_{O'}, y_{O'})$ e si vogliano calcolare le coordinate gaussiane di $P(N'_P, E'_P)$ in un sistema di assi con origine nel vertice O'.

A tal fine si determinano innanzitutto le coordinate gaussiane dei punti P e O' nel sistema di assi con origine nel vertice O coincidente con quella catastale, mediante le relazioni [8] e quindi si applicano nell'ordine le relazioni [12] e [16], cosicché risulta in definitiva:

$$\begin{aligned} N'_P &= y_P - y_{O'} + K_1(x_P^2 - x_{O'}^2) \\ E'_P &= x_P - x_{O'} \end{aligned} \qquad [17]$$

5.2. – Passaggio da coordinate di Gauss a coordinate di Sanson-Flamsteed

Si vogliano determinare le coordinate Sanson-Flamsteed di un punto $\mathrm{P} \equiv (x_P, y_P)$, note le coordinate gaussiane di $P \equiv (N'_P, E'_P)$ in un sistema di assi con origine in un vertice O' di cui si conoscono le coordinate di Sanson-Flamsteed $O' \equiv (x_{O'}, y_{O'})$.

A tal fine basta invertire le relazioni [17].

Si ha pertanto, svolgendo per comodità la parentesi e raccogliendo a fattor comune:

$$[18] \qquad \begin{aligned} x_P &= E'_P + x_{O'} \\ y_P &= N'_P + y_{O'} - K_1((E'_P + x_{O'})^2 - x_{O'}^2) = N'_P + y_{O'} - K_1 E'_P(E'_P + 2\,x_{O'}) \end{aligned}$$

5.3. – Passaggio da coordinate di Gauss a coordinate di Gauss-Boaga

Siano date le coordinate di Gauss-Boaga, cioè espresse nel riferimento nazionale, di un vertice $O' \equiv (N_{O'}, E_{O'})$, mentre di un altro punto P, appartenente allo stesso «*foglio catastale*» di O', siano date le coordinate gaussiane in un sistema di assi con origine in O', ovvero $P \equiv (N'_P, E'_P)$.

Si vogliano ora calcolare le coordinate di Gauss-Boaga di $P \equiv (N_P, E_P)$.

A tal fine si determinano innanzitutto le coordinate gaussiane del punto O' nel riferimento nazionale, che indichiamo con $(N^*_{O'}, E^*_{O'})$, ponendo per i suddetti punti:

$$[19] \qquad N^*_{O'} = N_{O'}/0{,}9996; \qquad E^*_{O'} = (E_{O'} - f_o)/0{,}9996$$

Si determinano quindi le coordinate gaussiane del vertice $P \equiv (N^*_P, E^*_P)$ espresse nel riferimento nazionale mediante le relazioni [15], dove al secondo membro, tenendo conto delle [16], si pone, con approssimazione sufficiente ai nostri scopi, $u = N'_P$, $v = E'_P$, nella forma:

$$[20] \qquad \begin{aligned} E^*_P &= E^*_{O'} + E'_P + K_2\, E^*_{O'}(E'_P\, E^*_{O'} + E'^2_P - N'^2_P) \\ N^*_P &= N^*_{O'} + N'_P\,(1 + K_2\, E^{*2}_P) \end{aligned}$$

Per calcolare infine le coordinate di Gauss-Boaga del vertice $P \equiv (N_P, E_P)$ basta porre:

$$[21] \qquad N_P = N^*_P 0{,}9996; \qquad E_P = E^*_P 0{,}9996 + f_o$$

Ricordiamo che, nelle relazioni [19] e [21], f_o rappresenta il valore della falsa origine delle ascisse, e tenendo conto che le province in cui il Catasto ha utilizzato la rappresentazione di Sanson-Flamsteed si trovano nel fuso Ovest del riferimento geodetico nazionale si ha:

$$f_o = 1.500 \text{ km}$$

5.4. – Passaggio da coordinate di Gauss-Boaga a coordinate di Gauss

Siano date le coordinate di Gauss-Boaga, cioè nel riferimento nazionale, di due punti $P \equiv (N_P, E_P)$ e $O' \equiv (N_{O'}, E_{O'})$, appartenenti allo stesso «*foglio catastale*», e si vogliano determinare le coordinate gaussiane di $P \equiv (N'_P, E'_P)$, in un sistema di assi con origine nel vertice O'.

A tal fine si determinano innanzitutto le coordinate gaussiane dei punti P e O' nel riferimento nazionale, che indichiamo con (N^*, E^*), mediante le relazioni [19].

Si determinano quindi le differenze di coordinate gaussiane, espresse nel riferimento nazionale, tra i vertici P e O', ovvero si pone:

$$[22] \qquad \delta N^* = N^*_P - N^*_{O'} \cong N'_P; \qquad \delta E^* = E^*_P - E^*_{O'} \cong E'_P$$

Infine basta risolvere le [20] rispetto a N'_P, E'_P, ponendo nelle parentesi, con approssimazione sufficiente ai nostri scopi ed in virtù delle [12] e delle [16], $N'_P = \delta N^*$, $E'_P = \delta E^*$, e considerare,

per comodità, lo sviluppo in serie dell'espressione di N'_P limitato al termine del primo ordine, cosicché si ottengono le relazioni:

$$[23] \quad \begin{aligned} E'_P &= \delta E^* - K_2 E^*_{O'}(E^*_{O'} \delta E^* + \delta E^{*2} - \delta N^{*2}) \\ N'_P &= \delta N^* (1 - K_2 E^{*2}_P) \end{aligned}$$

6. – RICERCA DEI PARAMETRI DI ROTO-TRASLAZIONE PIANA CON VARIAZIONE DI SCALA

Nel precedente punto 5 abbiamo messo in evidenza le relazioni esistenti tra sistemi di assi gaussiani locali e sistemi di assi rispettivamente di Sanson-Flamsteed, di estensione non esulante il «*foglio catastale*», con il significato da attribuire a tale termine precedentemente specificato, e di Gauss-Boaga.

Appare allora evidente che il problema della trasformazione delle coordinate plano-cartografiche da catastali a nazionali (e viceversa) trova la propria possibilità di soluzione ove si esegua il passaggio tra i corrispondenti sistemi di assi gaussiani locali.

Al riguardo, conviene porre in evidenza che nel caso in esame appare opportuno non utilizzare nei calcoli di trasformazione le coordinate dei punti ideali costituenti le origini catastali in quanto la loro definizione, come già segnalato, in relazione all'epoca dell'uso della rappresentazione di Sanson-Flamsteed per la formazione delle mappe catastali, è avvenuta sulla base di elementi provvisori o addirittura non compensati dell'I.G.M.

Appare invece molto più affidabile, per ciascun sistema di assi catastale, fare intervenire nel calcolo, in luogo dell'origine ideale, un altro vertice, assunto come origine ausiliaria, del quale siano note – o almeno si possano determinare con la necessaria precisione – le coordinate catastali e nazionali.

Designeremo con O' tale origine ausiliaria, avvertendo esplicitamente che in generale, o almeno in tutti i casi possibili, essa deve coincidere con un trigonometrico I.G.M. di ordine maggiore tra quelli presenti nel «*foglio catastale*», quindi caratterizzato da una precisione sicuramente non inferiore rispetto a quella di tutti gli altri vertici oggetto della trasformazione.

Tanto premesso, poiché i sistemi di assi gaussiani locali risultano diversamente orientati, varieranno conseguentemente i valori della riduzione angolare e del modulo di deformazione lineare della congiungente il generico vertice P con l'origine ausiliaria O'.

Si può peraltro facilmente dimostrare che nel caso in esame tali variazioni risultano trascurabili ai fini dei calcoli di trasformazione delle coordinate.

Tenendo altresì presente che all'epoca della formazione delle mappe catastali in proiezione di Sanson-Flamsteed, non erano disponibili affatto gli elementi geodetici compensati della rete geodetica nazionale, che vennero pubblicati dell'I.G.M. solo in epoca di venti anni successiva, la soluzione dello specifico problema può essere oggi affrontata attraverso considerazioni di natura probabilistica, basate sulla conoscenza di un certo numero di vertici, opportunamente dislocati possibilmente ai bordi del sistema di assi catastale, di cui siano note le coordinate plano-cartografiche nei due sistemi di rappresentazione Sanson-Flamsteed e Gauss-Boaga.

Pertanto, eseguito preliminarmente il passaggio da coordinate catastali e nazionali a coordinate gaussiane locali, l'accennata procedura di trasformazione consiste sostanzialmente in una roto-traslazione piana con variazione di scala e comporta quindi la determinazione di quattro parametri incogniti, costituiti dalle due componenti del vettore della traslazione, nonché dalla rotazione e dal fattore di scala esistente tra i due sistemi di assi.

In definitiva, volendo applicare questo metodo, è necessario disporre di almeno due punti di cui si conoscano le coordinate nelle due rappresentazioni cartografiche, catastale e nazionale.

Naturalmente in tal caso non è possibile eseguire un'analisi statistica dei valori dei parametri di roto-traslazione.

Per la corretta applicazione del metodo si deve disporre quindi di un numero q>2 di tali punti noti in doppie coordinate, per dar luogo ad un sistema esuberante di equazioni la cui ridondanza vale:

$$2 \text{ x } q - 4$$

In questo caso, si può procedere alla ricerca del più probabile valore dei parametri di roto-traslazione, secondo il principio dei minimi quadrati, e tale ricerca può essere correttamente condotta solo se i residui delle equazioni possono essere riguardati come errori casuali.

Al riguardo assumiamo l'ipotesi, non lontana certamente dal vero, che tali discrepanze possono essere trattate come eventi di carattere casuale.

Tanto premesso, consideriamo ora due sistemi di assi gaussiani che indichiamo con N^{I}, E^{I} e N^{II}, E^{II}.

Con riferimento ad un generico vertice "i", le relazioni che definiscono la trasformazione di coordinate plano-cartografiche gaussiane locali, attraverso una roto-traslazione piana con variazione di scala, sono, nel caso in esame:

$$[24] \qquad \begin{aligned} N^{II}_i &= \sigma\,(N^{I}_i \cos\theta + E^{I}_i \operatorname{sen}\theta) + T' \\ E^{II}_i &= \sigma\,(E^{I}_i \cos\theta - N^{I}_i \operatorname{sen}\theta) + T'' \end{aligned}$$

dove:
- σ è il fattore di scala che tiene conto di eventuali disomogeneità dimensionali dei due riferimenti;
- θ è la rotazione azimutale, in senso destrorso, del primo sistema di assi gaussiano locale per assumere lo stesso orientamento del secondo;
- T', T'' sono le componenti della traslazione per ottenere la sovrapposizione dell'origine ausiliaria individuata dal vertice O′ considerato rispettivamente nel riferimento (N^{I}, E^{I}) e nel riferimento (N^{II}, E^{II}).

Per comodità di calcolo conviene porre nelle precedenti:

$$[25] \qquad r = \sigma \cos\theta; \qquad\qquad s = \sigma \operatorname{sen}\theta;$$

cosicché si ottengono le piú comode relazioni:

$$[26] \qquad \begin{aligned} N^{II}_i &= N^{I}_i r + E^{I}_i s + T' \\ E^{II}_i &= E^{I}_i r - N^{I}_i s + T'' \end{aligned}$$

dove r, s, T', T'', diventano ora i parametri incogniti della roto-traslazione.

Le precedenti si possono scrivere per ciascuno dei q>2 vertici noti in doppie coordinate e dei suddetti parametri si possono determinare dei valori più probabili, risolvendo il sistema esuberante di equazioni secondo i principi della teoria dei minimi quadrati.

In particolare la ricerca verrà condotta con il metodo delle osservazioni indirette.

In tale ambito le [26] vanno riguardate come equazioni generatrici.

Le equazioni generate si ottengono immediatamente ponendo:

$$[27] \qquad \begin{aligned} N^{I}_i r + E^{I}_i s + T' - N^{II}_i &= \Delta_{N_i} \\ E^{I}_i r - N^{I}_i s + T'' - E^{II}_i &= \Delta_{E_i} \end{aligned}$$

Dove Δ_{N_i} , Δ_{E_i} rappresentano i residui di osservazione, o scarti, per ora incogniti.

Per q punti noti in doppie coordinate, che designeremo sinteticamente come punti di roto-traslazione, le precedenti danno quindi luogo ad un sistema di $2q$ equazioni in $2q + 4$ incognite (i $2q$ residui di osservazione ed i quattro parametri di roto-traslazione r, s, T', T'').

Osserviamo ora che la ricerca dei più probabili valori dei parametri di roto-traslazione, sempre secondo la teoria dei minimi quadrati, si può eseguire mediante:

1) impiego diretto delle doppie coordinate dei punti di roto-traslazione;

2) impiego delle doppie coordinate baricentriche dei punti di roto-traslazione.

Osserviamo ancora preliminarmente che nelle equazioni generate le coordinate vanno considerate come quantità osservate e quindi occorre associare ad esse i relativi pesi.

Senza soffermarci su considerazioni di carattere teorico, converrà eventualmente verificare, anche con misure dirette sul terreno, la congruenza di tutti i vertici che si intendono utilizzare per la roto-traslazione e sostituire quelli affetti da errori ritenuti non accettabili.

Cosicché, selezionati i vertici validamente utilizzabili, si attribuisce ad essi lo stesso peso unitario che non incide nel calcolo.

Passiamo quindi all'esame delle suddette procedure che permettono di definire i parametri necessari ad eseguire il cambiamento di riferimento gaussiano locale.

A) – Impiego diretto delle doppie coordinate dei punti di roto-traslazione

Per agevolare sia l'esposizione della procedura, nonché il successivo passaggio alle applicazioni, conviene fare preliminarmente le seguenti posizioni:

[28]

$a_{hk} = N^{I}_{(h+1)/2}$	per h dispari e k = 1	$(1 \le h \le 2q;$	$(h+1)/2=i;$	$1 \le i \le q)$
$a_{hk} = E^{I}_{h/2}$	per h pari e $k = 1$	$(1 \le h \le 2q;$	$h/2=i;$	$1 \le i \le q)$
$a_{hk} = E^{I}_{(h+1)/2}$	per h dispari e $k = 2$	$(1 \le h \le 2q;$	$(h+1)/2=i;$	$1 \le i \le q)$
$a_{hk} = - N^{I}_{h/2}$	per h pari e $k = 2$	$(1 \le h \le 2q;$	$h/2=i;$	$1 \le i \le q)$
$a_{hk} = 1$	per h dispari e $k = 3$	$(1 \le h < 2q)$		
$a_{hk} = 0$	per h pari e $k = 3$	$(1 < h \le 2q)$		
$a_{hk} = 0$	per h dispari e $k = 4$	$(1 \le h < 2q)$		
$a_{hk} = 1$	per h pari e $k = 4$	$(1 < h \le 2q)$		
$l_h = - N^{II}_{(h+1)/2}$	per h dispari	$(1 \le h < 2q;$	$(h+1)/2=i;$	$1 \le i \le q)$
$l_h = - E^{II}_{h/2}$	per h pari	$(1 < h \le 2q;$	$h/2=i;$	$1 \le i \le q)$
$w_h = \Delta_{N(h+1)/2}$	per h dispari	$(1 \le h < 2q;$	$(h+1)/2=i;$	$1 \le i \le q)$
$w_h = \Delta_{E h/2}$	per h pari	$(1 < h \le 2q;$	$h/2=i;$	$1 \le i \le q)$

$r = x_1$; $s = x_2$; $T' = x_3$; $T'' = x_4$

Tanto premesso il sistema delle equazioni generate può essere posto nella forma generale:

[29]

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + l_1 = w_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + l_2 = w_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{2q-1,1}x_1 + a_{2q-1,2}x_2 + a_{2q-1,3}x_3 + a_{2q-1,4}x_4 + l_{2q-1} = w_{2q-1}\\
&a_{2q,1}x_1 + a_{2q,2}x_2 + a_{2q,3}x_3 + a_{2q,4}x_4 + l_{2q} = w_{2q}
\end{aligned}
$$

di $2q$ equazioni in $2q + 4$ incognite, delle quali $2q$ sono costituite dagli scarti w e 4 dai parametri di roto-traslazione, ora indicati con x.

Consideriamo quindi la matrice A dei coefficienti delle incognite x, di $2q$ righe e 4 colonne:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2q-1,1} & a_{2q-1,2} & a_{2q-1,3} & a_{2q-1,4} \\ a_{2q,1} & a_{2q,2} & a_{2q,3} & a_{2q,4} \end{vmatrix}$$

ovvero per le posizioni [28]:

$$[30] \quad A = \begin{vmatrix} N_1^I & E_1^I & 1 & 0 \\ E_1^I & -N_1^I & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N_q^I & E_q^I & 1 & 0 \\ E_q^I & -N_q^I & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ed i vettori delle incognite x, di 4 elementi, dei termini noti l di 2q elementi e dei residui (incogniti) w di $2q$ elementi:

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} \qquad l = \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ l_{2q-1} \\ l_{2q} \end{vmatrix} \qquad w = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ w_{2q-1} \\ w_{2q} \end{vmatrix}$$

ovvero per le posizioni [28]:

$$[31] \quad x = \begin{vmatrix} r \\ s \\ T' \\ T'' \end{vmatrix} \qquad l = \begin{vmatrix} -N_1^{II} \\ -E_1^{II} \\ \cdots \\ \cdots \\ -N_q^{II} \\ -E_q^{II} \end{vmatrix} \qquad w = \begin{vmatrix} \Delta_{N_1} \\ \Delta_{E_1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \Delta_{N_q} \\ \Delta_{E_q} \end{vmatrix}$$

A questo punto il calcolo di compensazione si sviluppa in forma matriciale secondo le note procedure del metodo delle osservazioni indirette, che pertanto ci limitiamo sinteticamente a richiamare.

Basta porre nell'ordine:

$$[32] \quad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}; \quad \boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{l}; \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{Q}; \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{l}; \quad m_o^2 = (\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w})/(2q - 4); \quad \boldsymbol{m} = m_o^2 \boldsymbol{N}^{-1}.$$

B) – IMPIEGO DELLE DOPPIE COORDINATE BARICENTRICHE DEI PUNTI DI ROTO-TRASLAZIONE

Della precedente procedura di calcolo illustrata in forma generale, è possibile fornire una versione semplificata che può essere proficuamente impiegata quando si disponga di limitati mezzi di calcolo.

Dal punto di vista operativo occorre introdurre nel calcolo le coordinate baricentriche dei punti di roto-traslazione.

A tale riguardo ricordiamo innanzitutto che le coordinate del baricentro di un insieme di «q» punti riferiti a due sistemi di assi si ottengono facilmente ponendo:

$$[33] \quad N^{\mathrm{I}}_G = (1/q)\sum_{i=1}^{q} N^{\mathrm{I}}_i; \qquad E^{\mathrm{I}}_G = (1/q)\sum_{i=1}^{q} E^{\mathrm{I}}_i$$

$$[34] \quad N^{\mathrm{II}}_G = (1/q)\sum_{i=1}^{q} N^{\mathrm{II}}_i; \qquad E^{\mathrm{II}}_G = (1/q)\sum_{i=1}^{q} E^{\mathrm{II}}_i$$

Nel caso della trasformazione delle coordinate del baricentro dei punti di roto-traslazione, nell'ipotesi che essa avvenga senza errore, si possono applicare le relazioni [26] che forniscono:

$$[35] \quad \begin{aligned} N^{\mathrm{II}}_G &= N^{\mathrm{I}}_G \mathrm{r} + E^{\mathrm{I}}_G s + T' \\ E^{\mathrm{II}}_G &= E^{\mathrm{I}}_G \mathrm{r} - N^{\mathrm{I}}_G s + T'' \end{aligned}$$

Pertanto per un generico punto «i» potremo porre, ricordando le [27]:

$$[36] \quad \begin{aligned} N^{\mathrm{II}}_i - N^{\mathrm{II}}_G &= (N^{\mathrm{I}}_i - N^{\mathrm{I}}_G)\mathrm{r} + (E^{\mathrm{I}}_i - E^{\mathrm{I}}_G)s - \Delta_{N_i} \\ E^{\mathrm{II}}_i - E^{\mathrm{II}}_G &= (E^{\mathrm{I}}_i - E^{\mathrm{I}}_G)\mathrm{r} - (N^{\mathrm{I}}_i - N^{\mathrm{I}}_G)s - \Delta_{E_i} \end{aligned}$$

e posto altresì:

$$[37] \quad n^{\mathrm{I}}_i = N^{\mathrm{I}}_i - N^{\mathrm{I}}_G; \qquad e^{\mathrm{I}}_i = E^{\mathrm{I}}_i - E^{\mathrm{I}}_G; \qquad n^{\mathrm{II}}_i = N^{\mathrm{II}}_i - N^{\mathrm{II}}_G; \qquad e^{\mathrm{II}}_i = E^{\mathrm{II}}_i - E^{\mathrm{II}}_G$$

si hanno le relazioni:

$$[38] \quad \begin{aligned} n^{\mathrm{II}}_i &= n^{\mathrm{I}}_i r + e^{\mathrm{I}}_i s - \Delta_{N_i} \\ e^{\mathrm{II}}_i &= e^{\mathrm{I}}_i r - n^{\mathrm{I}}_i s - \Delta_{E_i} \end{aligned}$$

ovvero:

$$[39]\qquad \begin{aligned} n^{\mathrm{I}}_i\, r + e^{\mathrm{I}}_i\, s - n^{\mathrm{II}}_i &= \Delta_{N_i} \\ e^{\mathrm{I}}_i\, r - n^{\mathrm{I}}_i\, s - e^{\mathrm{II}}_i &= \Delta_{E_i} \end{aligned}$$

Le precedenti vanno assunte come una nuova forma delle equazioni generate.

Assumendo l'ipotesi che la trasformazione delle coordinate del baricentro avvenga senza errore, le precedenti conservano la stessa precisione delle equazioni generate [27].

Per «q» vertici noti in doppie coordinate si perviene quindi al seguente sistema di $2q$ equazioni in $2q + 2$ incognite (q residui Δ_{N_i}, q residui Δ_{E_i} ed i due parametri di roto-traslazione r ed s):

$$[40]\qquad \begin{aligned} n^{\mathrm{I}}_1\, r + e^{\mathrm{I}}_1\, s - n^{\mathrm{II}}_1 &= \Delta_{N_1} \\ e^{\mathrm{I}}_1\, r - n^{\mathrm{I}}_1\, s - e^{\mathrm{II}}_1 &= \Delta_{E_1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n^{\mathrm{I}}_q\, r + e^{\mathrm{I}}_q\, s - n^{\mathrm{II}}_q &= \Delta_{N_q} \\ e^{\mathrm{I}}_q\, r - n^{\mathrm{I}}_q\, s - e^{\mathrm{II}}_q &= \Delta_{E_q} \end{aligned}$$

Senza indugiare ulteriormente sugli aspetti di carattere teorico, ci limitiamo a far presente che, come è d'altra parte ben noto, il ricorso alle coordinate baricentriche consente di ricondurre il calcolo ad operazioni algebriche di semplicissima esecuzione.

Infatti le [32] per la determinazione dei parametri r ed s danno luogo alle seguenti relazioni di immediata applicazione:

$$[41]\qquad \begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^{q} (n^{\mathrm{I}}_i\, n^{\mathrm{II}}_i + e^{\mathrm{I}}_i\, e^{\mathrm{II}}_i) \Big/ \sum_{i=1}^{q} (n^{\mathrm{I}}_i{}^2 + e^{\mathrm{I}}_i{}^2) \\ s &= \sum_{i=1}^{q} (e^{\mathrm{I}}_i\, n^{\mathrm{II}}_i - n^{\mathrm{I}}_i\, e^{\mathrm{II}}_i) \Big/ \sum_{i=1}^{q} (n^{\mathrm{I}}_i{}^2 + e^{\mathrm{I}}_i{}^2) \end{aligned}$$

A questo punto osserviamo che dalle relazioni [26], che si possono scrivere per ciascun vertice noto in doppie coordinate, è possibile ricavare un valore approssimato delle componenti della traslazione ponendo:

$$[42]\qquad T' = (1/q) \sum_{i=1}^{q} (N^{\mathrm{II}}_i - N^{\mathrm{I}}_i\, r - E^{\mathrm{I}}_i\, s); \qquad T'' = (1/q) \sum_{i=1}^{q} (E^{\mathrm{II}}_i - E^{\mathrm{I}}_i\, r + N^{\mathrm{I}}_i\, s)$$

Definiti a questo punto i valori di r, s, T', T'', mediante le [27] (ovvero anche mediante le [40]), si possono calcolare i valori dei residui Δ_{N_i} e Δ_{E_i}.

C) Determinati i valori dei parametri di roto-traslazione si può procedere infine alla definizione del valore della rotazione del primo sistema di assi gaussiano locale per assumere lo stesso orientamento del secondo sistema di assi, nonché alla definizione della variazione di scala esistente tra i due suddetti riferimenti.

Basta porre, ricordando le relazioni [25]:

$$\theta = \text{arctg}\,(s/r)$$
$$\sigma = (r^2 + s^2)^{1/2} \qquad [43]$$

Si potrebbe altresì eseguire, con le note procedure delle compensazioni della teoria dei minimi quadrati che per brevità omettiamo, la determinazione dello S.Q.M. dell'unità di peso, delle quantità compensate, nonché di θ e σ.

7. – LA PROCEDURA DI TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE

La procedura di trasformazione delle coordinate Sanson-Flamsteed in coordinate Gauss-Boaga, o viceversa, nel caso dei sistemi di assi catastali, può essere schematizzata infine come segue:

1) Determinazione delle coordinate dei «q» punti di roto-traslazione rispetto a riferimenti gaussiani locali

1a - Trasformazione di coordinate Sanson-Flamsteed in coordinate gaussiane locali
Siano (x_i, y_i) le coordinate Sanson-Flamsteed dei «q» punti di roto-traslazione nel riferimento catastale.
Per passare alle coordinate gaussiane degli stessi punti riferite ad un sistema di assi locale avente origine nel vertice O', che indichiamo con (N^{I}_i, E^{I}_i) nel caso del passaggio da coordinate Sanson-Flamsteed a coordinate Gauss-Boaga, ovvero con (N^{II}_i, E^{II}_i) nel caso del passaggio inverso, basta applicare le relazioni [17].

1b - Trasformazione di coordinate Gauss-Boaga in coordinate gaussiane locali
Siano $(N_{O'}, E_{O'})$ e (N_i, E_i) le coordinate Gauss-Boaga rispettivamente del vertice O' assunto come origine ausiliaria e dei «q» punti di roto-traslazione.
Per passare alle coordinate gaussiane dei punti di roto-traslazione riferite ad un sistema di assi locale avente origine nel vertice O', che indichiamo con (N^{II}_i, E^{II}_i) nel caso del passaggio da coordinate Sanson-Flamsteed a coordinate Gauss-Boaga, ovvero con (N^{I}_i, E^{I}_i) nel caso del passaggio inverso, basta applicare le relazioni [19], [22] e [23].

2) Determinazione dei parametri di roto-traslazione

2a - Impiego diretto delle doppie coordinate dei punti di roto-traslazione
Dopo aver costruito la matrice $\boldsymbol{A}$ data dalla [30] e la matrice $\boldsymbol{l}$ data dalla seconda delle [31] basta eseguire i calcoli matriciali indicati dalle relazioni [32].

2b - Impiego delle doppie coordinate baricentriche dei punti di roto-traslazione
In questo caso si applicano intanto le relazioni [33], [34], [37], [41], [42] e quindi le relazioni [27] o le relazioni [40].

2c - Determinazione dei valori della rotazione θ e del fattore di scala σ
Per la definizione del valore della rotazione del primo sistema di assi gaussiano locale per assumere lo stesso orientamento del secondo, nonché per la definizione del fattore di scala tra gli stessi riferimenti, basta applicare le relazioni [43].

3) Trasformazione delle coordinate di un punto *P*

La procedura di passaggio delle coordinate di un punto *P* da Sanson-Flamsteed a Gauss-Boaga (o viceversa), si sviluppa ora come segue:

3a - Determinazione delle coordinate del punto P nel primo dei riferimenti gaussiani locali, nei due seguenti casi:

3a/1 - passaggio da coordinate Sanson-Flamsteed a coordinate Gauss-Boaga

Siano (x_P, y_P) le coordinate Sanson-Flamsteed del punto *P* nel riferimento catastale. Per passare alle coordinate gaussiane dello stesso punto, che indichiamo in questo caso con (N^I_P, E^I_P), riferite ad un sistema di assi locale avente origine nel vertice $O' \equiv (x_{O'}, y_{O'})$ basta applicare le relazioni [17].

3a/2 - passaggio da coordinate Gauss-Boaga a coordinate Sanson-Flamsteed

Siano $(N_{O'}, E_{O'})$ e (N_P, E_P) le coordinate Gauss-Boaga rispettivamente del vertice *O'* assunto come origine ausiliaria e del punto P. Per passare alle coordinate gaussiane del punto P, che indichiamo in questo caso con (N^I_P, E^I_P), riferite ad un sistema di assi locale avente origine nel vertice O', basta applicare le relazioni [19], [22] e [23].

3b - Cambiamento del riferimento gaussiano locale

Per eseguire il cambiamento di riferimento gaussiano locale, ovvero per determinare le coordinate (N^{II}_P, E^{II}_P) del punto *P*, basta applicare le relazioni [26].

3c- Passaggio dalle coordinate del punto P relative al secondo sistema di assi gaussiano locale, alle coordinate plano-cartografiche, nei due seguenti casi:

3c/1- passaggio da coordinate Sanson-Flamsteed a coordinate Gauss-Boaga

Per passare dalle coordinate gaussiane locali del punto $P \equiv (N^{II}_P, E^{II}_P)$, riferite ad un sistema di assi gaussiano locale avente origine nel vertice *O'*, alle coordinate Gauss-Boaga, basta applicare le relazioni [19], [20] e [21].

3c/2 - passaggio da coordinate Gauss-Boaga a coordinate Sanson-Flamsteed

Per passare dalle coordinate gaussiane locali del punto $P \equiv (N^{II}_P, E^{II}_P)$, riferite ad un sistema di assi gaussiano locale avente origine nel vertice *O'*, alle coordinate Sanson-Flamsteed riferite al sistema di assi catastale con origine *O*, basta applicare le relazioni [18].

8. – APPLICAZIONI E COMPLEMENTI

Forniamo nel seguito due esempi di applicazione delle relazioni trovate al duplice scopo di scandire bene la successione dei calcoli e di sviluppare qualche ulteriore considerazione.

Il sistema di assi considerato a tal fine è quello relativo al «foglio catastale» n. 24 del foglio n. 84 della Carta d'Italia ed interessa punti trigonometrici della provincia di Massa Carrara.

Al riguardo si ritiene opportuno precisare che in epoca passata l'Amministrazione ha provveduto ad eseguire, in varie zone, la trasformazione delle coordinate dei punti trigonometrici con metodi di interpolazione.

Nel caso specifico, per la predisposizione dell'esempio che segue sono stati utilizzati i valori delle coordinate provenienti dai suddetti calcoli di interpolazione.

I) Esempio

Siano note le coordinate Sanson-Flamsteed del punto trigonometrico Teglia e se ne vogliano calcolare le corrispondenti coordinate Gauss-Boaga, assumendo come origine ausiliaria O' il vertice Campedone.

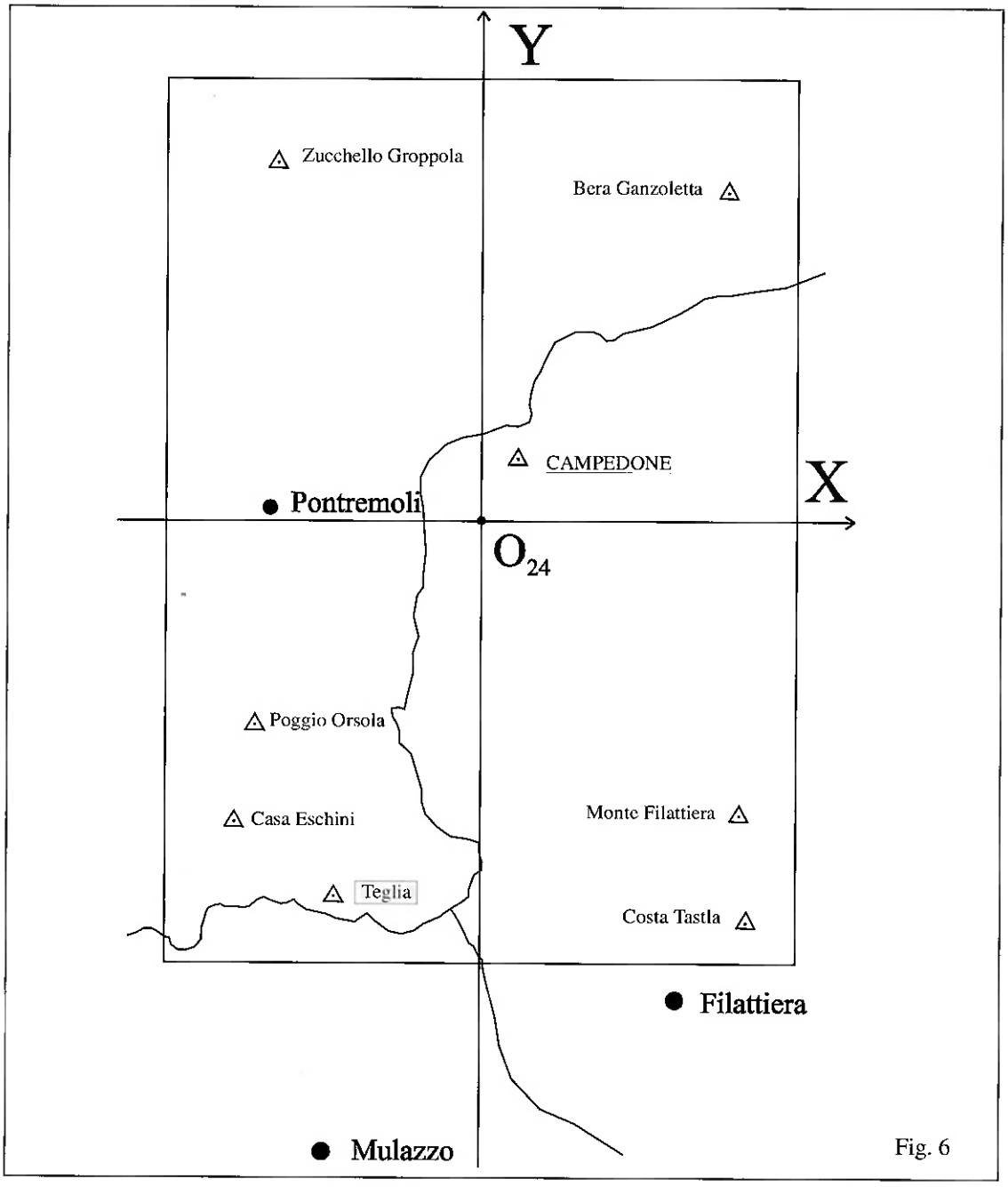

Fig. 6

– Dati –

– Coordinate Sanson-Flamsteed del punto trigonometrico Teglia:

$$x_P = -1569.55 \qquad y_P = -4050.19$$

– Coordinate Gauss-Boaga e Sanson-Flamsteed dell'origine ausiliaria Campedone:

$$N_{O'} = 4914638.74; \quad E_{O'} = 1572997.37. \quad x_{O'} = 390{,}53; \quad y_{O'} = 651{,}37$$

– Sono inoltre note le doppie coordinate plano-cartografiche, Gauss-Boaga e Sanson-Flamsteed dei seguenti «q» vertici (cfr. *Fig.* 6):

Bera Ganzoletta	$N_1 = 4917463.08;$	$E_1 = 1575188.50;$	$x_1 = +2613.68$	$y_1 = +3451.60;$
Monte Filattiera	$N_2 = 4910921.27;$	$E_2 = 1575395.28;$	$x_2 = +2747.73;$	$y_2 = -3094.35;$
Costa Tastla	$N_3 = 4909802.54;$	$E_3 = 1575480.68;$	$x_3 = +2820.72;$	$y_3 = -4214.38;$
Casa Eschini	$N_4 = 4910804.45;$	$E_4 = 1570058.95;$	$x_4 = -2591.35;$	$y_4 = -3151.76;$
Poggio Orsola	$N_5 = 4911816.18;$	$E_5 = 1570251.76;$	$x_5 = -2387.22;$	$y_5 = -2141.82;$
Zucchello Groppola	$N_6 = 4917724.12;$	$E_6 = 1570418.93;$	$x_6 = -2154.28;$	$y_6 = +3765.94$

– Esecuzione dei calcoli –

1) – Si esegue il passaggio dalle coordinate Sanson-Flamsteed alle coordinate gaussiane dei punti di roto-traslazione nel sistema di assi con origine O' (Campedone), applicando le relazioni [17] nella forma:

$$N^{I}_1 = y_1 - y_{O'} + K_1(x_1^2 - x_{O'}^2) = +2800.74; \quad E^{I}_1 = x_1 - x_{O'} = +2223.15.$$

Il calcolo eseguito per tutti i vertici di roto-traslazione fornisce:

$$\begin{aligned}
N^{I}_1 &= +2800.74; & E^{I}_1 &= +2223.15;\\
N^{I}_2 &= -3745.15; & E^{I}_2 &= +2357.20;\\
N^{I}_3 &= -4865.15; & E^{I}_3 &= +2430.19;\\
N^{I}_4 &= -3802.63; & E^{I}_4 &= -2981.88;\\
N^{I}_5 &= -2792.77; & E^{I}_5 &= -2777.75;\\
N^{I}_6 &= +3114.91; & E^{I}_6 &= -2544.81;\\
\hline
\sum_{i=1}^{q} N_i^I &= -9290.05 & \sum_{i=1}^{q} E_i^I &= -1293.90.
\end{aligned}$$

2) Si esegue il passaggio dalle coordinate Gauss-Boaga alle coordinate gaussiane dei punti di roto-traslazione nel secondo sistema di assi locale avente origine O'.

– A tal fine, si determinano innanzitutto, mediante le relazioni [19] le coordinate gaussiane relative al riferimento geodetico nazionale, dell'origine ausiliaria e dei vertici di roto-traslazione. Si ha, in questo caso:

$$N^*_{O'} = N_{O'} / 0{,}9996 = 4916605.38; \qquad E^*_{O'} = (E_{O'} - f_o)/0{,}9996 = +73026.58$$

$$N^*_1 = N_1 / 0{,}9996 = 4919430.85; \qquad E^*_1 = (E_1 - f_o)/0{,}9996 = +75218.59$$

Procedendo in maniera analoga per gli altri vertici di roto-traslazione si ha:

$N^*_2 = 4912886.42;$ $E^*_2 = +75425.45;$

$N^*_3 = 4911767.25;$ $E^*_3 = +75510.88;$

$N^*_4 = 4912769.56;$ $E^*_4 = +70086.98;$

$N^*_5 = 4913781.69;$ $E^*_5 = +70279.87;$

$N^*_6 = 4919692.00;$ $E^*_6 = +70447.11.$

– Si determinano quindi, mediante le relazioni [22], i valori delle differenze di coordinate gaussiane tra i punti di roto-traslazione e l'origine ausiliaria. Si ha:

$$\delta N^*_1 = N^*_1 - N^*_{O'} = +2825.47; \quad \delta E^*_1 = E^*_1 - E^*_{O'} = +2192.01$$

Procedendo in maniera analoga per gli altri vertici di roto-traslazione si ha:

$\delta N^*_2 = -3718.96;$ $\delta E^*_2 = +2398.87;$

$\delta N^*_3 = -4838.14;$ $\delta E^*_3 = +2484.30;$

$\delta N^*_4 = -3835.82;$ $\delta E^*_4 = -2939.60;$

$\delta N^*_5 = -2823.69;$ $\delta E^*_5 = -2746.71;$

$\delta N^*_6 = +3086.61;$ $\delta E^*_6 = -2579.47.$

– Si determinano infine i valori delle coordinate gaussiane di tutti i punti di roto-traslazione nel secondo sistema di assi locale avente origine O'. A tal fine si applicano le relazioni [23], nella forma:

$$N^{II}_1 = \delta N^*_1 (1 - K_2 E^{*2}_1) = +2825.27;$$
$$E^{II}_1 = \delta E^*_1 - K_2 E^*_{O'} (E^*_{O'} \delta E^*_1 + \delta E^{*2}_1 - \delta N^{*2}_1) = +2191.87$$

Il calcolo eseguito per tutti i vertici di roto-traslazione fornisce:

N^{II}_1	=	+2825.27;	E^{II}_1	=	+2191.87;
N^{II}_2	=	–3718.70;	E^{II}_2	=	+2398.72;
N^{II}_3	=	–4837.80;	E^{II}_3	=	+2484.16;
N^{II}_4	=	–3835.59	E^{II}_4	=	–2939.40;
N^{II}_5	=	–2823.52;	E^{II}_5	=	–2746.53;
N^{II}_6	=	+3086.43;	E^{II}_6	=	–2579.30;
$\sum_{i=1}^{q} N_i^{II}$	=	–9303.90	$\sum_{i=1}^{q} E_i^{II}$	=	–1190.48.

3) Si determinano i parametri di roto-traslazione.

3*a*) Impiego diretto delle doppie coordinate dei punti di roto-traslazione.

Si predispongono la matrice dei coefficienti del sistema delle equazioni degli errori, nonché il vettore dei termini noti.

Applicando nell'ordine la [30] e la seconda delle [31], in questo caso si ottengono rispettivamente, la matrice A di 12×4 elementi ed il vettore dei termini noti l di 12 elementi,

appresso riportati:

$$A = \begin{vmatrix} N^{I}_1 & E^{I}_1 & 1 & 0 \\ E^{I}_1 & -N^{I}_1 & 0 & 1 \\ N^{I}_2 & E^{I}_2 & 1 & 0 \\ E^{I}_2 & -N^{I}_2 & 0 & 1 \\ N^{I}_3 & E^{I}_3 & 1 & 0 \\ E^{I}_3 & -N^{I}_3 & 0 & 1 \\ N^{I}_4 & E^{I}_4 & 1 & 0 \\ E^{I}_4 & -N^{I}_4 & 0 & 1 \\ N^{I}_5 & E^{I}_5 & 1 & 0 \\ E^{I}_5 & -N^{I}_5 & 0 & 1 \\ N^{I}_6 & E^{I}_6 & 1 & 0 \\ E^{I}_6 & -N^{I}_6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +2800.74 & +2223.15 & 1 & 0 \\ +2223.15 & -2800.74 & 0 & 1 \\ -3745.15 & +2357.20 & 1 & 0 \\ +2357.20 & +3745.15 & 0 & 1 \\ -4865.15 & +2430.19 & 1 & 0 \\ +2430.19 & +4865.15 & 0 & 1 \\ -3802.63 & -2981.88 & 1 & 0 \\ -2981.88 & +3802.63 & 0 & 1 \\ -2792.77 & -2777.75 & 1 & 0 \\ -2777.75 & +2792.77 & 0 & 1 \\ +3114.91 & -2544.81 & 1 & 0 \\ -2544.81 & -3114.91 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad l = \begin{vmatrix} -N^{II}_1 \\ -E^{II}_1 \\ -N^{II}_2 \\ -E^{II}_2 \\ -N^{II}_3 \\ -E^{II}_3 \\ -N^{II}_4 \\ -E^{II}_4 \\ -N^{II}_5 \\ -E^{II}_5 \\ -N^{II}_6 \\ -E^{II}_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2825.27 \\ -2191.87 \\ +3718.70 \\ -2398.72 \\ +4837.80 \\ -2484.16 \\ +3835.59 \\ +2939.40 \\ +2823.52 \\ +2746.53 \\ -3086.43 \\ +2579.30 \end{vmatrix}$$

Tanto premesso, si eseguono poi nell'ordine le operazioni sulle matrici [32].

In particolare il vettore delle incognite x, di 4 elementi, risulta:

$$x = N^{-1} Q = \begin{vmatrix} +0{,}999939 \\ +0{,}011124 \\ -0{,}01 \\ 0{,}00 \end{vmatrix}$$

ovvero: $r = +0{,}999939$

$s = +0{,}011124$

$T' = -0{,}01$

$T'' = 0{,}00$

3b) Impiego delle doppie coordinate baricentriche dei punti di roto-traslazione

– Si calcolano le coordinate baricentriche N^{I}_{G}, E^{I}_{G}, N^{II}_{G}, E^{II}_{G}, mediante le relazioni [33] e [34]. Si ha, tenendo conto che q=6:

$$N^{I}_{G} = (1/q)\sum_{i=1}^{q} N^{I}_{i} = -1548.34; \qquad E^{I}_{G} = (1/q)\sum_{i=1}^{q} E^{I}_{i} = -215.65$$

$$N^{II}_{G} = (1/q)\sum_{i=1}^{q} N^{II}_{i} = -1550.65; \qquad E^{II}_{G} = (1/q)\sum_{i=1}^{q} E^{II}_{i} = -198.41$$

– Si calcolano i valori n^{I}_{i}, e^{I}_{i}, n^{II}_{i}, e^{II}_{i}, mediante le relazioni [37]. Si ha intanto:

$$n^{I}_{1} = N^{I}_{1} - N^{I}_{G} = +4349.08; \qquad e^{I}_{1} = E^{I}_{1} - E^{I}_{G} = +2438.80;$$

$$n^{II}_{1} = N^{II}_{1} - N^{II}_{G} = +4375.92; \qquad e^{II}_{1} = E^{II}_{1} - E^{II}_{G} = +2390.28;$$

procedendo in maniera analoga per gli altri punti di roto-traslazione risulta altresì:

$n^{I}_{2} = -2196.81;$	$e^{I}_{2} = +2572.85;$	$n^{II}_{2} = -2168.05;$	$e^{II}_{2} = +2597.13;$
$n^{I}_{3} = -3316.81;$	$e^{I}_{3} = +2645.84;$	$n^{II}_{3} = -3287.15;$	$e^{II}_{3} = +2682.57;$
$n^{I}_{4} = -2254.29;$	$e^{I}_{4} = -2766.23;$	$n^{II}_{4} = -2284.94;$	$e^{II}_{4} = -2740.98;$
$n^{I}_{5} = -1244.42;$	$e^{I}_{5} = -2562.10;$	$n^{II}_{5} = -1272.87;$	$e^{II}_{5} = -2548.11;$
$n^{I}_{6} = +4663.25;$	$e^{I}_{6} = -2329.16;$	$n^{II}_{6} = +4637.08;$	$e^{II}_{6} = -2380.89.$

– Si determinano i parametri di roto-traslazione.

A tal fine si pone intanto:

$n^{I}_{1}n^{II}_{1} + e^{I}_{1}e^{II}_{1} = 24860669.00$	$e^{I}_{1}n^{II}_{1} - n^{I}_{1}e^{II}_{1} = 276480.76$	$n^{I}_{1}{}^{2} + e^{I}_{1}{}^{2} = 24862259.68$
$n^{I}_{2}n^{II}_{2} + e^{I}_{2}e^{II}_{2} = 11444828.59$	$e^{I}_{2}n^{II}_{2} - n^{I}_{2}e^{II}_{2} = 127357.74$	$n^{I}_{2}{}^{2} + e^{I}_{2}{}^{2} = .11445544.65$
$n^{I}_{3}n^{II}_{3} + e^{I}_{3}e^{II}_{3} = 18000495.27$	$e^{I}_{3}n^{II}_{3} - n^{I}_{3}e^{II}_{3} = 200320.64$	$n^{I}_{3}{}^{2} + e^{I}_{3}{}^{2} = 18001710.87$
$n^{I}_{4}n^{II}_{4} + e^{I}_{4}e^{II}_{4} = 12733105.99$	$e^{I}_{4}n^{II}_{4} - n^{I}_{4}e^{II}_{4} = 141711.55$	$n^{I}_{4}{}^{2} + e^{I}_{4}{}^{2} = 12733837.79$
$n^{I}_{5}n^{II}_{5} + e^{I}_{5}e^{II}_{5} = 8112510.82$	$e^{I}_{5}n^{II}_{5} - n^{I}_{5}e^{II}_{5} = 90277.30$	$n^{I}_{5}{}^{2} + e^{I}_{5}{}^{2} = 8112949.01$
$n^{I}_{6}n^{II}_{6} + e^{I}_{6}e^{II}_{6} = 27169335.20$	$e^{I}_{6}n^{II}_{6} - n^{I}_{6}e^{II}_{6} = 302183.27$	$n^{I}_{6}{}^{2} + e^{I}_{6}{}^{2} = 27170928.77$
$\sum_{i=1}^{q} = 102320944.87$	$\sum_{i=1}^{q} = 1138331.26$	$\sum_{i=1}^{q} = 102327230.76$

quindi dalle [41] si ha:

$$r = \sum_{i=1}^{q} (n^{I}_{i}\, n^{II}_{i} + e^{I}_{i}\, e^{II}_{i}) \Big/ \sum_{i=1}^{q} (n^{I}_{i}{}^{2} + e^{I}_{i}{}^{2}) = +0.999939$$

$$s = \sum_{i=1}^{q} (e^{I}_{i}\, n^{II}_{i} - n^{I}_{i}\, e^{II}_{i}) \Big/ \sum_{i=1}^{q} (n^{I}_{i}{}^{2} + e^{I}_{i}{}^{2}) = +0.011124$$

Poniamo altresì:

$$N^{II}_1 - N^{I}_1 r - E^{I}_1 s = -0.026 \qquad E^{II}_1 - E^{I}_1 r + N^{I}_1 s = +0.009$$
$$N^{II}_2 - N^{I}_2 r - E^{I}_2 s = +0.004 \qquad E^{II}_2 - E^{I}_2 r + N^{I}_2 s = +0.002$$
$$N^{II}_3 - N^{I}_3 r - E^{I}_3 s = +0.024 \qquad E^{II}_3 - E^{I}_3 r + N^{I}_3 s = -0.006$$
$$N^{II}_4 - N^{I}_4 r - E^{I}_4 s = -0.026 \qquad E^{II}_4 - E^{I}_4 r + N^{I}_4 s = -0.003$$
$$N^{II}_5 - N^{I}_5 r - E^{I}_5 s = -0.023 \qquad E^{II}_5 - E^{I}_5 r + N^{I}_5 s = -0.017$$
$$N^{II}_6 - N^{I}_6 r - E^{I}_6 s = +0.014 \qquad E^{II}_6 - E^{I}_6 r + N^{I}_6 s = +0.005$$

$$\sum_{i=1}^{q} (N^{II}_i - N^{I}_i r - E^{I}_i s) = -0.034 \qquad \sum_{i=1}^{q} (E^{II}_i - E^{I}_i r + N^{I}_i s) = -0.010$$

ed infine dalle [42] si ha:

$$T' = (1/q) \sum_{i=1}^{q} (N^{II}_i - N^{I}_i r - E^{I}_i s) = -0{,}01 \quad T'' = (1/q) \sum_{i=1}^{q} (E^{II}_i - E^{I}_i r + N^{I}_i s) = 0{,}00$$

Prima di procedere ulteriormente nel calcolo riteniamo opportuno porre in evidenza che i valori dei parametri di roto-traslazione r, s, T', T'', ottenuti utilizzando le coordinate baricentriche coincidono, nei limiti di approssimazione necessari, ove si tenga conto dell'estensione del «foglio catastale», con quelli ottenuti con l'impiego diretto delle coordinate plano-cartografiche.

– Si calcolano gli scarti (residui) tra le coordinate dei punti riferite al secondo sistema di assi e quelle ottenute con il calcolo di trasformazione.

A tal fine, secondo che i parametri di roto-traslazione siano stati determinati con le modalità indicate ai precedenti punti 3a) o 3b), si procede rispettivamente al calcolo del vettore $\boldsymbol{w}$ come indicato dalle [32] oppure si utilizzano le relazioni [27], od anche le relazioni [40].

Tanto premesso, si ha, utilizzando ad esempio rispettivamente le [32] e le [40]:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{l} = \begin{vmatrix} +0.02 \\ -0.01 \\ -0.01 \\ 0.00 \\ -0.03 \\ 0.00 \\ +0.02 \\ 0.00 \\ +0.02 \\ +0.02 \\ -0.02 \\ -0.01 \end{vmatrix}$$

		w
$n^{I}_1 r + e^{I}_1 s - n^{II}_1 =$	$\Delta_{N_1} =$	$+0.02$
$e^{I}_1 r - n^{I}_1 s - e^{II}_1 =$	$\Delta_{E_1} =$	-0.01
$n^{I}_2 r + e^{I}_2 s - n^{II}_2 =$	$\Delta_{N_2} =$	-0.01
$e^{I}_2 r - n^{I}_2 s - e^{II}_2 =$	$\Delta_{E_2} =$	0.00
$n^{I}_3 r + e^{I}_3 s - n^{II}_3 =$	$\Delta_{N_3} =$	-0.03
$e^{I}_3 r - n^{I}_3 s - e^{II}_3 =$	$\Delta_{E_3} =$	0.00
$n^{I}_4 r + e^{I}_4 s - n^{II}_4 =$	$\Delta_{N_4} =$	$+0.02$
$e^{I}_4 r - n^{I}_4 s - e^{II}_4 =$	$\Delta_{E_4} =$	0.00
$n^{I}_5 r + e^{I}_5 s - n^{II}_5 =$	$\Delta_{N_5} =$	$+0.02$
$e^{I}_5 r - n^{I}_5 s - e^{II}_5 =$	$\Delta_{E_5} =$	$+0.02$
$n^{I}_6 r + e^{I}_6 s - n^{II}_6 =$	$\Delta_{N_6} =$	-0.02
$e^{I}_6 r - n^{I}_6 s - e^{II}_6 =$	$\Delta_{E_6} =$	-0.01

Si controlla che gli scarti abbiano valori non superiori al limite di tolleranza prescelto per la definizione delle coordinate dei punti. I punti caratterizzati da scarti superiori a tale limite dovranno essere eliminati dal calcolo dei parametri di roto-traslazione ed eventualmente sostituiti con altri idonei.

Si determinano i valori della rotazione e della variazione di scala.
In questo caso le relazioni [43] forniscono:

$$\theta = \text{arctg}\,(s/r) = +0.0111242^{\text{rad}} = +0°38'14",6 \qquad \sigma = (r^2 + s^2)^{1/2} = 1.000001$$

Nota bene

A questo punto, prima di procedere ulteriormente nell'esempio, osserviamo che nei calcoli fin qui svolti sono intervenute le sole coordinate del vertice O' (Campedone) assunto come origine ausiliaria, nonché le coordinate dei vertici di roto-traslazione, nei due sistemi di assi.

Ciò vuol dire in particolare che per la trasformazione delle coordinate di tutti i punti appartenenti allo stesso sistema di assi Sanson-Flamsteed (ovvero ricadenti nello stesso "foglio catastale" nel senso più volte precisato), i valori delle quantità $N^*_{O'}$, $E^*_{O'}$, r, s, T', T'', θ, σ, devono essere calcolati una sola volta.

Definiti tali valori, le operazioni di calcolo per la trasformazione delle coordinate di tutti i vertici appartenenti ad uno stesso sistema di assi Sanson-Flamsteed si limitano a quelli, molto semplici e rapidi successivamente esposti.

Con riferimento alla determinazione delle coordinate Gauss-Boaga del punto trigonometrico Teglia, considerato ai fini dell'esempio, il calcolo si sviluppa come segue:

– Si effettua il passaggio dalle coordinate Sanson-Flamsteed alle coordinate gaussiane nel sistema di assi locale avente origine in O', mediante le relazioni [17], nella forma:

$$N^{\text{I}}_P = y_P - y_{O'} + \text{K}_1(x_P{}^2 - x_{O'}{}^2) = -4701.38 \qquad E^{\text{I}}_P = x_P - x_{O'} = -1960.08$$

– Si esegue il cambiamento di riferimento gaussiano, applicando le relazioni [26], che in questo caso forniscono:

$$N^{\text{II}}_P = N^{\text{I}}_P\text{r} + E^{\text{I}}_P\text{s} + T' = -4722.90 \qquad E^{\text{II}}_P = E^{\text{I}}_P\text{r} - N^{\text{I}}_P\text{s} + T'' = -1907.66$$

– Si determinano le coordinate gaussiane del punto $P=(N_P^*, E_P^*)$ nel sistema nazionale, applicando le relazioni [20], nella forma:

$$E^*_P = E^*_{O'} + E^{\text{II}}_P + K_2\, E^*_{O'}\,(E^{\text{II}}_P\, E^*_{O'} + E^{\text{II}}_P{}^2 - N^{\text{II}}_P{}^2) = +71118.78$$

$$N^*_P = N^*_{O'} + N^{\text{II}}_P\,(1 + K_2\, E^{*2}_P) = 4911882.18$$

– Si calcolano infine le coordinate Gauss-Boaga del punto P (Teglia) mediante le relazioni [21]:

$$N_P = N^*_P 0{,}9996 = 4909917.43; \qquad E_P = E^*_P 0{,}9996 + f_o = 1571090.33$$

Il Catasto fornisce per lo stesso punto le seguenti coordinate:

$$N = 4909917.43; \qquad E = 1571090.35.$$

II) Esempio

Siano note le coordinate Gauss-Boaga del vertice Teglia e se ne vogliano calcolare le corrispondenti coordinate Sanson-Flamsteed, assumendo come origine ausiliaria O' il vertice Campedone.

– Dati –

- Coordinate Gauss-Boaga del punto trigonometrico Teglia:

$N_P = 4909917.43;$ $E_P = 1571090.35$

– Siano altresì note le coordinate Sanson-Flamsteed e Gauss-Boaga del vertice di Campedone, che si assume come origine ausiliaria, nonché le doppie coordinate plano-cartografiche dei seguenti vertici: Bera Ganzoletta, Monte Filattiera, Costa Tastla, Casa Eschini, Poggio Orsola, Zucchello Groppola (cfr. esempio precedente).

– Esecuzione dei calcoli –

Il calcolo dei parametri di roto-traslazione si sviluppa in maniera del tutto analoga all'esempio precedente.

Peraltro per la determinazione delle coordinate gaussiane dei vertici di roto-traslazione, rispetto ai sistemi di assi locali aventi origini coincidenti con l'origine ausiliaria, dedotti rispettivamente dai sistemi di assi Sanson-Flamsteed e Gauss-Boaga, occorre avere la sola avvertenza di scambiare tra loro l'indice I e l'indice II.

Ci limitiamo pertanto a riportare i risultati ottenuti:

Coordinate gaussiane dei vertici di roto-traslazione nei sistemi di assi locali aventi origine in O', dedotti rispettivamente dal sistema Gauss-Boaga e dal sistema Sanson-Flamsteed:

$N^{I}_1 = +2825.27;$ $E^{I}_1 = +2191.87;$ $N^{II}_1 = +2800.74;$ $E^{II}_1 = +2223.15;$

$N^{I}_2 = -3718.70;$ $E^{I}_2 = +2398.72;$ $N^{II}_2 = -3745.15;$ $E^{II}_2 = +2357.20;$

$N^{I}_3 = -4837.80;$ $E^{I}_3 = +2484.16;$ $N^{II}_3 = -4865.15;$ $E^{II}_3 = +2430.19;$

$N^{I}_4 = -3835.59;$ $E^{I}_4 = -2939.40;$ $N^{II}_4 = -3802.63;$ $E^{II}_4 = -2981.88;$

$N^{I}_5 = -2823.52;$ $E^{I}_5 = -2746.53;$ $N^{II}_5 = -2792.77;$ $E^{II}_5 = -2777.75;$

$N^{I}_6 = +3086.43;$ $E^{I}_6 = -2579.30;$ $N^{II}_6 = +3114.91;$ $E^{II}_6 = -2544.81.$

Parametri di roto-traslazione:

a) Impiego diretto delle doppie coordinate dei punti di roto-traslazione.

$r = +0.999937;$ $s = -0.011124;$ $T' = +0.01;$ $T'' = 0.00;$

b) Impiego delle doppie coordinate baricentriche dei punti di roto-traslazione

$$r = +0.999937; \qquad s = -0.011124; \qquad T' = +0.01; \qquad T'' = 0.00;$$

Poniamo in evidenza che i valori dei parametri di roto-traslazione r, s, T', T'', ottenuti utilizzando le coordinate baricentriche coincidono con quelli ottenuti con l'impiego diretto delle coordinate plano-cartografiche.

Valori della rotazione e della variazione di scala:

$$\theta = -0.0111242^{rad} = -0°38'14",6 \qquad \sigma = 0.999999$$

Nota bene

Anche in questo caso vale l'osservazione, formulata nel precedente esempio, che i valori delle quantità N^*_O, E^*_O, r, s, T', T'', θ, σ, devono essere calcolati una sola volta.

Definiti tali valori, le operazioni di calcolo per la trasformazione delle coordinate di tutti i vertici appartenenti ad uno stesso sistema di assi Sanson-Flamsteed si limitano a quelli, molto semplici e rapidi successivamente esposti.

Con riferimento alla determinazione delle coordinate Gauss-Boaga del punto trigonometrico Teglia, considerato ai fini dell'esempio, il calcolo si sviluppa come segue:

– Si determinano le coordinate gaussiane del punto P nel primo riferimento, applicando le relazioni [19], [22], [23], ovvero in questo caso ponendo nell'ordine:

$$N^*_P = N_P/0{,}9996 = 4911882.18; \qquad E^*_P = (E_P - f_o)/0{,}9996 = +71118.80$$

$$\delta N^* = N^*_P - N^*_O = -4723.20; \qquad \delta E^* = E^*_P - E^*_O = -1907.78$$

$$N^{I}_P = \delta N^* (1 - K_2 E^{*2}_P) = -4722.9; \qquad E^{I}_P = \delta E^* - K_2 E^*_O (E^*_O \delta E^* + \delta E^{*2} - \delta N^{*2}) = -1907.64$$

– Si esegue il cambiamento di riferimento gaussiano, applicando le relazioni [26], che in questo caso forniscono:

$$N^{II}_P = N^{I}_P r + E^{I}_P s + T' = -4701.38; \qquad E^{II}_P = E^{I}_P r - N^{I}_P s + T'' = -1960.06$$

– Si calcolano le coordinate Sanson-Flamsteed del vertice P (Teglia), applicando le relazioni [18] nella forma:

$$x_P = E^{II}_P + x_O = -1569.53; \qquad y_P = N^{II}_P + y_O - K_1 E^{II}_P (E^{II}_P + 2\,x_O) = -4050.19$$

Il Catasto fornisce per lo stesso punto le seguenti coordinate:

$$x_P = -1569.55; \qquad y_P = -4050.19.$$

BIBLIOGRAFIA

BOAGA G., *Trattato di geodesia e topografia con elementi di fotogrammetria*, Cedam 1948.

BOAGA G., *Sviluppo dei lavori trigonometrici italiani attraverso i secoli e stato attuale della rete geodetica fondamentale,* Rivista del Catasto e dei SS.TT.EE., n. 1, 1950.

DI FILIPPO S., *Sulla trasformazione delle coordinate plano-cartografiche dalla rappresentazione di Cassini-Soldner alla rappresentazione di Gauss-Boaga e viceversa*, Rivista del Dipartimento del Territorio, n. 3, 1995 e n. 1, 1996.

FRANCHI N., *Elementi di cartografia*, Istituto Geografico Militare, 1950.

INGHILLERI G., *Topografia generale*, UTET, 1974

PAROLI A., *Metodi e strumenti di rilevamento nei 70 anni di formazione del Catasto terreni*, Rivista del Catasto e dei SS.TT.EE., n. 4, 1958.